PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

43 Sei I ein echtes Ideal des Ringes R. Kann man die I-adische Topologie auf R durch eine Metrik definieren?

44 (a) Sei I Ideal des Ringes R und $\widehat{R} = \prod_{k=0}^{\infty} I^k/I^{k+1}$ die I-adische Vervollständigung. Zeige, dass $\widehat{R}$ in natürlicher Weise ein Ring ist.

(b) Zeige, dass $\widehat{R}$ mit der induzierten Topologie vollständig ist.

Hinweis: Präzisiere zuerst die induzierte Topologie auf $\widehat{R}$ und den Begriff der Cauchy-Folge.

(c)* Beschreibe die (x)-adische Topologie auf $\widehat{R} = K[[x]]$ direkt durch eine geeignete Topologie auf dem unendlichen kartesischen Produkt $K^{\mathbb{N}}$, wobei K mit der diskreten Topologie versehen sei. Ist dies die Produkt-Topologie?

45 Es sei I ein homogenes Ideal von $R = K[x_1, \ldots, x_n]$.

(a) Zeige, dass R/I in natürlicher Weise graduierter Ring ist.

(b) Es sei $I = (x^2y)$, bzw. $I = (x^3, y^5) \subset K[x, y]$. Ab welchem k stimmt die Hilbert-Funktion von R/I mit dem Hilbert-Polynom von R/I überein.

Hinweis: Eruiere zuerst, ab welchem k der Binomial-Koeffizient $\binom{k+a}{b}$ mit einem Polynom übereinstimmt (für vorgegebene $a, b \in \mathbb{Z}$).

46^s (a) Erarbeite den Begriff des Keimes in $a \in X$ einer stetigen Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem topologischen Raum X unter Verwendung des gerichteten Systems $\{U \subset X$ offen, $a \in U\}$ und des direkten Limes der Ringe $R_U = \{f : U \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$.

(b) Verallgemeinere das Konzept auf stetige Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen beliebigen topologischen Räumen.

(c) Zeige, dass die Komposition von stetigen Keimen wieder ein (stetiger) Keim ist.

Hinweis: Wohldefiniertheit!

(d) Definiere den Keim eines topologischen Raumes in einem Punkt.

47 Zeige, dass $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ der inverse Limes der Ringe $K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1, \ldots, x_n)^k$ ist.

48* (a) Präzisiere die Aussage, dass die Vervollständigung einen exakten Funktor für endlich erzeugte R-Moduln über einem noetherschen Ring definiert.

(b) Es seien $p \subset q \subset R$ Primideale. Vergleiche die Lokalisierungen R_p, R_q, $(R_p)_{q \cdot R_p}$ und $(R_q)_{p \cdot R_q}$.

(c) Es sei $p \subset R = K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal und $X = V(p) \subset K^n$ die assoziierte Verschwindungmenge. Interpretiere die Elemente der Lokalisierung R_p als Keime von Funktionen auf K^n längs X, wobei K^n mit der Zariski-Topologie versehen sei.

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall eines maximalen Ideals $p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Präzisiere dann den Begriff "Keim einer Funktion längs X" für beliebige X.